O rozwiązaniach i stabilności równań funkcyjnych związanych z nierównością Popoviciu

Małgorzata Chudziak
Instytut Matematyki, Uniwersytet Rzeszowski

Załóżmy, że $(G,+)$ i $(H,+)$ są grupami przemiennymi. W referacie przedstawię wyniki dotyczące rozwiązań i stabilności równania funkcyjnego

$$\begin{aligned} &f_0(x+y+z)+f_1(x)+f_2(y)+f_3(z)\\ &=g_1(x+y)+g_2(x+z)+g_3(y+z) \quad \text{dla} \quad x,y,z\in G, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $f_i : G \to H$ dla $i \in \{0,1,2,3\}$ oraz $g_i : G \to H$ dla $i \in \{1,2,3\}$ są szukanymi funkcjami. Motywacja do badań nad równaniem (1) ma dwa źródła. Pierwszym są równania funkcyjne postaci

$$\begin{aligned} &Mf\left(\tfrac{x+y+z}{m}\right)+f(x)+f(y)+f(z)\\ &=N\left[f\left(\tfrac{x+y}{n}\right)+f\left(\tfrac{x+z}{n}\right)+f\left(\tfrac{y+z}{n}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

W przypadku, gdy $M=m=3$ i $N=n=2$, równanie (2) pojawiło się po raz pierwszy w pracy T. Popoviciu [13], jako szczególny przypadek nierówności

$$\begin{aligned} &3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+f(x)+f(y)+f(z)\\ &\geqslant 2\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{x+z}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Nierówność ta jest obecnie znana w teorii funkcji wypukłych jako nierówność Popoviciu. Więcej informacji na jej temat można znaleźć np. w książce

C. Niculescu i L.-E. Persona [12]. Równania postaci (2) były rozważane m. in. w [1], [2]-[7], [10], [11] oraz [14]-[18]. Równanie (1) jest wspólnym uogólnieniem równań tego typu.

Drugim źródłem motywacji jest równanie

$$f(x+y+z)+f(x)+f(y)+f(z)=f(x+y)+f(x+z)+f(y+z), \quad (3)$$

które pojawiło się po raz pierwszy w pracy Pl. Kannappana [9] w związku z pytaniem postawionym przez Y. E. Deebę. Problem stabilności równania (3) był rozważany m.in. w pracach [5] i [8]. Zauważmy, że równanie (1) jest spexideryzowaną wersją równania (3).

Wyniki, które przedstawię dotyczą m.in. rozwiązań i stabilności równania (1) przy założeniu, że grupa H jest jednoznacznie podzielna przez 2.

Literatura

[1] J. Brzdęk, *A note on stability of the Popoviciu functional equation on restricted domain*, Demonstratio Math., **43** (2010), 635–641.

[2] M. Chudziak, *On a generalization of the Popoviciu equation on groups*, Stud. Math. Paedagog. Cracov. **9** (2010), 49–53.

[3] M. Chudziak, *Stability of the Popoviciu type functional equations on groups*, Opuscula Math., w druku.

[4] M. Chudziak, *Popoviciu type functional equations on groups*, w: Th.M. Rassias, J. Brzdęk (ed.) Functional equations in Mathematical Analysis, Springer, w druku.

[5] W. Fechner, *On the Hyers-Ulam stability on functional equations connected with additive and quadratic mappings*, J. Math. Anal. Appl. **322** (2006), 774–786.

[6] R. Ger, *Remark 14, in: Report of Meeting, The Forty-second International Symposium on Functional Equations, June 20-27, 2004, Opava, Czech Republic*, Aequationes Math. **69** (2005), 188.

[7] R. Ger, *Remark 20, in: Report of Meeting, The Forty-second International Symposium on Functional Equations, June 20-27, 2004, Opava, Czech Republic*, Aequationes Math. **69** (2005), 191.

[8] S.-M. Jung, *On the Hyers-Ulam stability of the functional equation that have the quadratic property*, J. Math. Anal. Appl. **222** (1998), 126–137.

[9] P. Kannappan, *Quadratic functional equation and inner product spaces*, Results Math. **27** (1995), 368–372.

[10] Y. W. Lee, *On the stability on a quadratic Jensen type functional equation*, J. Math. Anal. Appl. **270** (2002), 590–601.

[11] Y. W. Lee, *Stability of a generalized quadratic functional equation with Jensen type*, Bull. Korean Math. Soc. **42** (2005), 57–73.

[12] C. P. Niculescu, L.-E. Persson, *Convex functions and their applications. A contemporary approach*, CMS Books in Mathematics **23**, Springer, New York 2006.

[13] T. Popoviciu, *Sur certaines inégalités qui caractérisent les fonctions convexes*, An. Ştiinţt. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat. (N.S.) **11** (1965), 155–164.

[14] W. Smajdor, *Note on a Jensen type functional equation*, Publ. Math. Debrecen **63** (2003), 703–714.

[15] W. Smajdor, *On a Jensen type functional equation, in: Report of Meeting, The Forty-second International Symposium on Functional Equations, June 20-27, 2004, Opava, Czech Republic*, Aequationes Math. **69** (2005), 177.

[16] W. Smajdor, *Remark 23, in: Report of Meeting, The Forty-second International Symposium on Functional Equations, June 20-27, 2004, Opava, Czech Republic*, Aequationes Math. **69** (2005), 193.

[17] T. Trif, *Hyers-Ulam-Rassias stability of a Jensen type functional equation*, J. Math. Anal. Appl. **250** (2000), 579–588.

[18] T. Trif, *On the stability of a functional equation deriving from an inequality of Popoviciu for convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **272** (2002), 604–616.