

Spis treści

Przedmowa	v
Wprowadzenie	xi
1 Przestrzenie liniowo-topologiczne	1
1.1 Podstawowe pojęcia algebry liniowej i topologii	1
1.1.1 Przestrzenie i operatory liniowe	2
Przestrzenie liniowe	2
Baza Hamela	4
Zbiory wypukłe	7
Funkcjonał Minkowskiego	7
Operatory liniowe	9
Rozszerzanie funkcjonału	10
1.1.2 Przestrzenie topologiczne i metryczne	12
Przestrzenie topologiczne	12
Przestrzenie metryczne	16
1.2 Przestrzenie liniowo-topologiczne	17
1.2.1 Podstawowe definicje i własności	18
Interpretacje geometryczne	21
1.2.2 Przestrzenie lokalnie wypukłe	22
Oddzielanie zbiorów wypukłych	22
Punkty ekstremalne	25
1.3 Ćwiczenia	29
2 Przestrzenie Banacha	33
2.1 Przestrzenie unormowane	33
2.1.1 Podstawowe definicje	33
Norma	33
Przestrzeń unormowana	34
Przestrzeń Banacha	38
Równoważność przestrzeni i norm	38
Uzupełniające definicje	39
2.1.2 Uzupełnienie przestrzeni unormowanej	41
2.2 Przykłady przestrzeni unormowanych	44

2.2.1	Nierówności Höldera i Minkowskiego	45
2.2.2	Przestrzenie ciągłe	46
	Przestrzenie l_n^p i l^p	46
	Przestrzenie l_n^∞ i l^∞	49
	Przestrzenie c i c_0	49
	Przestrzeń $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$	50
	Przestrzeń przeliczalnie unormowana s	50
2.2.3	Przestrzenie funkcyjne	50
	Przestrzenie $B(\Omega)$, $C(\Omega)$, C^k	51
	Twierdzenia o aproksymacji funkcji ciągłych	51
	Przestrzenie $L^p(\Omega)$ i $L^\infty(\Omega)$	58
2.3	Przestrzenie skończenie wymiarowe	59
2.3.1	Zupełność i ośrodkowość przestrzeni skończenie wymiarowych	59
2.3.2	Zwartość w przestrzeni skończenie wymiarowej	62
2.4	Szeregi w przestrzeni unormowanej	65
2.5	Baza Schaudera	69
	Układy Schaudera i Haara	71
2.6	Ćwiczenia	72
3	Przestrzenie Hilberta	81
3.1	Przestrzenie unitarne	81
3.1.1	Iloczyn skalarny	81
	Związki iloczynu skalarnego z normą	83
3.1.2	Przestrzeń Hilberta	88
	Uzupełnienie przestrzeni unitarnej	89
3.1.3	Wyznacznik Grama	90
3.2	Ortogonalność	91
3.2.1	Układy ortogonalne	92
3.2.2	Dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni	95
3.3	Szeregi Fouriera	97
3.3.1	Rozwinięcie w szereg Fouriera	97
3.3.2	Baza w przestrzeni Hilberta	100
	Uniwersalność przestrzeni l^2	103
3.3.3	Zastosowania	103
3.4	Ćwiczenia	105
4	Operatory liniowe ciągłe	111
4.1	Podstawowe definicje	111
	Operatory ograniczone	112
	Norma operatora liniowego ciągłego	113
4.2	Przestrzenie operatorów liniowych ciągłych	117
4.2.1	Przestrzeń $\mathcal{L}(X, Y)$	117
4.2.2	Przestrzenie sprzężone	119
	Przestrzeń sprzężona z przestrzenią Hilberta	120
4.3	Twierdzenia o operatorach liniowych	123
4.3.1	Topologiczne własności operatorów liniowych	123

4.3.2	Zasada jednostajnej ograniczoności	128
4.3.3	Rozszerzanie funkcjonałów liniowych ciągłych	129
4.4	Operatory sprzężone i pełnociągłe	131
4.4.1	Operatory sprzężone	131
	Operatory sprzężone w przestrzeni Hilberta	132
4.4.2	Operatory liniowe pełnociągłe	135
4.5	Słabe topologie	138
4.5.1	Słaba zbieżność	139
4.5.2	Słaba topologia	142
4.5.3	Przestrzenie refleksywne	144
4.5.4	Słaba zwartość	146
4.6	Operatory liniowe nieograniczone	147
4.7	Ćwiczenia	149
5	Zastosowania odwzorowań liniowych	155
5.1	Elementy analizy spektralnej	155
5.1.1	Widmo operatora liniowego	155
	Widmo operatora pełnociągłego	161
5.1.2	Zastosowanie teorii spektralnej — równania całkowe	164
	Operatory całkowe	164
	Równania całkowe Fredholma	167
5.2	Rachunek różniczkowy i całkowy	170
5.2.1	Różniczka operatora	170
5.2.2	Podstawowe twierdzenia dotyczące różniczkowania operatorów	173
5.2.3	Całka Lebesgue'a	178
5.3	Ćwiczenia	184
A	Twierdzenia o punkcie stałym	187
A.1	Zasada odwzorowań zwężających	187
A.2	Twierdzenia Brouwera i Schaudera	192
A.3	Ćwiczenia	194
B	Izometrie	197
B.1	Izometrie w przestrzeniach unormowanych	197
B.2	Odwzorowania zachowujące iloczyn skalarny	202
B.3	Ćwiczenia	204
C	Notki biograficzne	207
	Spis literatury	221
	Skorowidz nazw i oznaczeń	223

Skorowidz nazw i oznaczeń

- C^* -algebra, 40
- X -topologia, 143
- X^* -topologia, 142
- algebra
 - C^* , 40
 - Banacha, 40
 - inwolucyjna, 40
 - liniowa, 3
 - przemiana, 3
 - unormowana, 40
 - z inwolucją, 3
 - z jednością, 3
- antyunitarne odwzorowanie, 203
- baza
 - algebraiczna, 4
 - Hamela, 4
 - otoczeń, 13
 - przestrzeni Hilberta, 101
 - przestrzeni liniowej, 3
 - Schaudera, 69
 - topologii, 13
- Bessela nierówność, 99
- bezwzględna zbieżność, 66
- całka operatora, 179
 - prostego, 179
- domknięcie zbioru, 14
- dopełnienie ortogonalne
 - podprzestrzeni, 96
 - zbioru, 109
- fazowa równoważność, 203
- forma liniowa, 9, 111
- funkcja
 - charakterystyczna, 178
 - o nośniku zwartym, 76
 - znikająca w nieskończoności, 76
- funkcje
 - jednakowo ciągłe, 78
 - wspólnie ograniczone, 78
- funkcjonal
 - Banacha, 10
 - liniowy, 9, 111
 - Minkowskiego, 8
 - podliniowy, 10
- gładka przestrzeń, 130
- Haara układ, 71
- hiperpłaszczyzna, 21
 - podpierająca, 116
 - równoległa, 21
- iloczyn
 - kartezjański, 15
 - skalarny, 81
- inwolucja, 3
- izometria, 199
- izomorfizm, 38
 - izometryczny, 39
- jądro operatora całkowego, 165
 - iterowane, 167
- jednakowa ciągłość, 78
- jednorodność normy, 33
- jednostajny warunek Cauchy'ego, 36
- kontrakcja, 187
- kryterium
 - Cauchy'ego, 68
 - d'Alemberta, 69
 - porównawcze, 68
- kula, 16
- Laplace'a operator, 148
- laplasjan, 148
- Legendre'a wielomian, 108
- lemat Riesz, 64

- metryka, 16
- nierówności
 - Höldera, 45
 - Minkowskiego, 45
- nierówność
 - Bessela, 99
 - Schwarza, 82
- norma, 34
 - ilorazowa, 78
 - operatora, 113
- normy równoważne, 39
- nośnik funkcji, 76
- odcinek, 7
- oddzielanie zbiorów
 - przez funkcjonal, 22
 - — silne, 22
 - przez hiperpłaszczyznę, 23
- odległość punktów, 16
- odwzorowania
 - fazowo równoważne, 203
- odwzorowanie
 - antyunitarne, 203
 - ciągłe, 15
 - — w punkcie, 16
 - izometryczne, 202
 - unitarne, 203
 - zwężające, 187
- operator
 - addytywny, 9
 - całkowny, 179
 - całkowy, 165
 - H-sprzężony, 133
 - hermitowski, 134
 - jednorodny, 9
 - Laplace'a, 148
 - liniowy, 9, 111
 - — ciągły, 19
 - — skończenie wymiarowy, 136
 - nuklearny, 152
 - ograniczony, 112
 - pełnociągły, 135
 - prosty, 178
 - samosprzężony, 134
 - sprzężony, 132
 - unitarny, 134
 - zwarty, 135
- ortogonalność, 91
 - Birkhoffa, 109
 - Jamesa, 109
 - Pitagorasa, 109
 - Roberts'a, 109
- ortonormalizacja, 93
- ośrodek, 14
- otoczenie (otwarte) punktu, 13
- otoczka wypukła, 7
 - domknięta, 31
- Parsewala tożsamość, 101
- pierścień unormowany, 51
- pochodna
 - kierunkowa, 171
 - operatora, 171
- podalgebra, 4
- podprzestrzeń
 - generowana przez zbiór, 4
 - liniowa, 3
 - rozpięta na zbiorze, 4
 - topologiczna, 13
 - własna, 156
- postać
 - funkcjonału liniowego nad \mathbb{K}^n , 10
 - operatora liniowego z \mathbb{K}^n w \mathbb{K}^m , 9
- półprzestrzeń, 21
- przeciętna zbieżność, 105
- przestrzenie
 - izometrycznie izomorficzne, 39
 - izomorficzne, 38
 - unitarnie izomorficzne, 89
- przestrzeń
 - $\mathbb{K}(\mathbb{N})$, 50
 - $B(\Omega)$, 51
 - c , 49
 - $C(\Omega)$, 51
 - $C^k(a, b)$, 58
 - c_0 , 50
 - l^p , 47
 - $L^p(\Omega)$, 58
 - $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, 59
 - l^∞ , 49
 - $L^\infty(\Omega)$, 58
 - l_n^p , 46
 - s , 50
 - X^* , 119
 - X_0^\perp , 96
 - $\mathcal{L}(X, Y)$, 117
 - nieskończenie wymiarowa, 3
 - Baire'a, 14
 - Banacha, 38
 - bidualna, 144
 - ciągowo zwarta, 15
 - dualna, 119
 - euklidesowa, 16, 36
 - gładka, 130
 - Hausdorffa, 14
 - Hilberta, 88

- jednostajnie wypukła, 39
- liniowa, 2
- liniowo-metryczna, 18
- liniowo-topologiczna, 18
- lokalnie wypukła, 22
- lokalnie zwarta, 15
- metryczna, 16
- ośrodkowa, 14
- przeliczalnie unormowana, 34
- pseudometryczna, 16
- refleksywna, 145
- Schura, 140
- sprzężona, 119
- ściśle wypukła, 39
- topologiczna, 13
- unitarna, 81
- unormowana, 34
- wektorowa, 2
- zupełna, 17
- zwarta, 14
- pseudometryka, 16
- pseudonorma, 33
- punkt
 - ekstremalny, 25
 - stały odwzorowania, 187
- Rademachera układ, 108
- rodzina rozdzielająca punkty, 52
- rozszerzenie funkcjonału, 10
- równanie
 - całkowite Fredholma, 167
 - Wignera, 203
- równoważność
 - norm, 39
 - przestrzeni, 38
- różniczka operatora, 171
- rzut ortogonalny, 95
- słaba
 - ciągowa zwartość, 147
 - ograniczoność, 139
 - topologia, 142
 - zbieżność, 139
 - zwartość, 147
- słaba wstecz
 - topologia, 143
- spektrum operatora, 155
- suma
 - algebraiczna, 2
 - cząstkowa, 65
 - prosta, 4
 - szeregu, 66
- symbol Kroneckera, 48
- szereg, 66
 - Fouriera, 98
 - von Neumanna, 157
- zbieżny, 66
 - — bezwzględnie, 66
 - — warunkowo, 66
- średnica zbioru, 198
- środek, 198
 - algebraiczny, 197
 - metryczny, 197
- teoria
 - aproksymacji, 71
 - falek, 72
- topologia, 13
 - indukowana, 13
 - mocna, 138
 - mocniejsza, 13
 - produktowa, 15
 - równoważna, 13
 - słaba, 142
 - — wstecz, 143
 - słabsza, 13
 - zadana przez normę, 34
- tożsamość Parsewala, 101
 - uogólniona, 110
- twierdzenie
 - Alaoglu, 147
 - Apoloniusza, 84
 - Arzeli–Ascoliego, 78
 - Baire’a, 17
 - Banacha, 113
 - — o operatorze odwrotnym, 126
 - — o punkcie stałym, 188
 - Banacha–Schaudera, 123
 - Banacha–Steinhaus’a, 128
 - Beckmana–Quarlesa, 201
 - Brouwera, 192
 - Clarksona–Milmana, 146
 - Fermata, 105
 - Fredholma, 169
 - Fubinięgo, 184
 - Gelfanda–Najmarka, 57
 - Grama–Schmidta, 93
 - Hahna–Banacha, 10
 - Jordana–von Neumanna, 85
 - Kadec’a–Andersona, 103
 - Krejna–Milmana, 27
 - Lipschitza, 190
 - Mazura, 57, 141
 - Mazura–Ulama, 199
 - o domkniętym wykresie, 127
 - o istnieniu bazy w przestrzeni Hilberta, 102
 - o oddzielaniu zbiorów, 23

- o odwzorowaniu otwartym, 123
 - o ortogonalizacji, 93
 - o ośrodkowości, 61
 - o promieniu spektralnym, 160
 - o przyrostach, 177
 - o rzucie ortogonalnym, 95
 - o uzupełnianiu przestrzeni unormowanej, 42
 - o zbiorze wypukłym, 94
 - Peano, 194
 - Pitagorasa, 105
 - Riesz–Fischera, 103
 - Riesz–Fréchet, 120
 - Schaudera, 138, 194
 - Stone’a–Weierstrassa, 52
 - Tichonowa, 15
 - Weierstrassa, 51
 - Wignera, 203
 - zasadnicze algebry, 193, 195
- układ
- generujący przestrzeń, 100
 - Haara, 71, 108
 - ortogonalny, 92
 - ortonormalny, 92
 - Rademachera, 108
 - Schaudera, 71
 - zamknięty, 100
 - zupełny, 100
- unitarna izomorficzność, 89
- unitarne odwzorowanie, 203
- uzupełnienie przestrzeni
- unitarnej, 90
 - unormowanej, 42
- wartość
- regularna, 155
 - własna operatora, 155
- warunek
- Cauchy’ego, 17
 - — jednostajny, 36
 - równoległoboku, 84
 - trójkąta, 16, 33
- warunkowa zbieżność, 66
- wektor własny, 156
- wektory
- liniowo niezależne, 3
 - liniowo zależne, 3
 - ortogonalne, 91
- widmo operatora, 155
- wielomian
- Legendre’a, 108
 - Tonelliego, 76
 - trygonometryczny, 77, 104
- wnętrze zbioru, 14
- wspólna ograniczoność, 78
- współczynniki Fouriera, 98
- wykres operatora, 127
- wymiar
- Hamela, 6
 - Hilberta, 103
 - przestrzeni liniowej, 3
- wypukłość, 7
- wyznacznik Grama, 90
- zanurzenie kanoniczne, 145
- zasada
- jednostajnej ograniczo-
-ności, 129
 - odwzorowań zwięzających, 187
- zbieżność
- ciągu, 14
 - mocna, 138
 - przeciętna, 105
 - słaba, 108, 139
 - względem normy, 37, 138
- zbiór
- brzegowy, 14
 - ciągowo słabo zwarty, 147
 - ciągowo zwarty, 15
 - domknięty, 13
 - drugiej kategorii, 14
 - ekstremalny, 26
 - gęsty, 14
 - liniowo gęsty, 62
 - liniowo niezależny, 3
 - nigdziegęsty, 14
 - otwarty, 13
 - pierwszej kategorii, 14
 - pochłaniającym, 7
 - wypukły, 7
 - zbalansowany, 7
 - zwarty, 14
 - — słabo, 147
 - — warunkowo, 15
 - — warunkowo ciągowo
słabo, 147
- znikająca w nieskończoności funkcja, 76
- zwartość, 14
- ciągowa, 15
 - ciągowo słaba, 147
 - lokalna, 15
 - słaba, 147
 - warunkowa, 15
 - warunkowo ciągowo słaba, 147