

**Wymagania do egzaminu dyplomowego dla studentów studiów II stopnia, obowiązujące dla cyklu studiów rozpoczętych w roku akademickim 2014/2015, zatwierdzone przez Radę Instytutu Matematyki dnia 25 czerwca 2015 r.**

Na egzaminie dyplomowym student powinien wykazać się znajomością i dobrym rozumieniem podstawowych pojęć matematycznych. Ponadto powinien dobrze operować językiem matematycznym, umieć przedstawić syntetycznie kluczowe problemy matematyki wyższej, a także widzieć związki matematyki wyższej z matematyką elementarną. Studentów specjalności nauczycielskiej obowiązuje ponadto znajomość i dobre rozumienie podstawowych zagadnień z dydaktyki matematyki.

Każdy student powinien być przygotowany do odpowiedzi na wszystkie zagadnienia działu I. Studentów specjalności nauczycielskiej obowiązują również pytania z działu II. Studentów specjalności nienauczycielskiej obowiązują pytania z działu III. Studentów studiujących obie specjalności (nauczycielską i finansową) obowiązują pytania z działu II i pytania z działu III.

**I. Pojęcia i wiadomości podstawowe**

1. Pojęcia teorii aksjomatycznej i jej modelu.
2. Aksjomatyczny system teorii mnogości i równoważne formy pewnika wyboru.
3. Liczby kardynalne i porządkowe.
4. Arytmetyka liczb kardynalnych.
5. Relacje równoważnościowe i porządkowe. Definiowanie pojęć matematycznych za pomocą relacji równoważnościowych. Uporządkowanie podstawowych zbiorów liczbowych.
6. Systemy aksjomatyczne arytmetyki liczb naturalnych. Konstrukcja zbioru liczb naturalnych w teorii mnogości. Konstrukcje podstawowych struktur liczbowych (liczby całkowite, wymierne, rzeczywiste i zespolone).
7. Geometria krzywych. Krzywe regularne, długość krzywej, trójścian Freneta.
8. Geometria powierzchni. Płaszczyzna styczna, wektor normalny.
9. Definicje i modele podstawowych struktur algebraicznych, struktury ilorazowe.
10. Homomorfizmy struktur algebraicznych. Podstawowe własności oraz przykłady w poszczególnych strukturach.
11. Krzywe i powierzchnie stopnia 2.
12. Aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa. Niezależność zdarzeń. Przykłady przestrzeni probabilistycznych.
13. Zmienne losowe jedno- i dwuwymiarowe i generowane przez nie przestrzenie probabilistyczne na prostej i na płaszczyźnie. Niezależność zmiennych losowych. Dystrybuanta. Wartość oczekiwana i wariancja.
14. Różne rodzaje zbieżności ciągów zmiennych losowych. Prawo wielkich liczb Bernoulliego. Twierdzenia graniczne.

15. Pochodna funkcji zespolonej. Zespolone szeregi potęgowe. Pojęcie funkcji analitycznej oraz holomorficznej oraz związku zachodzące między nimi.
16. Miara i jej podstawowe własności. Miara Lebesgue'a, miara Jordana.
17. Odwzorowania ciągle przestrzeni topologicznych, homeomorfizmy, izometrie.
18. Przestrzenie unormowane jako przykład łączenia struktury topologicznej i liniowej.
19. Podstawowe przykłady przestrzeni unormowanych ciągłych i funkcyjnych.
20. Miara Lebesgue'a i jej własności.
21. Całka Lebesgue'a, jej własności i związek z całką Riemanna.
22. Całki funkcji zespolonych. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego, wzór całkowy Cauchy'ego, ich konsekwencje oraz przykłady zastosowania.
23. Przestrzenie Banacha i Hilberta, ich własności. Związki zachodzące między przestrzeniami Banacha i Hilberta.
24. Operatory i funkcjonały liniowe ciągłe, podstawowe własności i przykłady. Przestrzeń operatorów liniowych i ciągłych.
25. Różne rodzaje przestrzeni topologicznych (aksjomaty oddzielania, zwartość, zupełność, spójność, ośrodkowość).
26. Twierdzenia o liczbach pierwszych. Rozmieszczenie liczb pierwszych.
27. Grupy rozwiązalne i ich związek z rozwiązalnością równań.
28. Elementy algebraiczne i elementy przestępne nad ciałem; rozszerzenia algebraiczne, rozszerzenia skończone, rozszerzenie o element algebraiczny.
29. Ciała algebraicznie domknięte. Twierdzenia Liouville'a i zasadnicze twierdzenie algebry.
30. Parametryzacja naturalna krzywej w  $\mathbb{R}^3$ ; krzywizna, torsja, przykłady.
31. Fundamentalne twierdzenie teorii krzywych (Dla każdych funkcji rzeczywistych gładkich ... określonych na przedziale .... istnieje krzywa ..... krzywizna .... skręcenie ....).
32. Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej. Momenty zmiennej losowej.
33. Podstawowe rozkłady prawdopodobieństwa i przykłady przestrzeni probabilistycznych o tych rozkładach (rozkład Bernoulliego, Poissona, normalny, Cauchy'ego itd.).
34. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych.
35. Przykłady metod rozwiązywania pewnych typów równań różniczkowych pierwszego i drugiego rzędu.

## **II. Dydaktyka matematyki**

1. Dydaktyczne problemy związane z definiowaniem i korzystaniem z definicji, formułowaniem twierdzeń, ich stosowaniem i dowodzeniem.
2. Poziomy i kryteria rozumienia pojęć. Typy rozumowań w nauczaniu matematyki (wnioskowanie empiryczne, intuicyjne i formalne, indukcja, dedukcja, redukcja, rozumowanie nie wprost).
3. Rodzaje zadań matematycznych w różnych koncepcjach nauczania, główne etapy wg. Polyi i przykłady wskazówek heurystycznych w procesie rozwiązywania zadań.
4. Cele nauczania matematyki, rola pojęciowego i algorytmicznego ujęcia matematyki w różnych koncepcjach nauczania.
5. Wykorzystanie technologii informacyjnej w nauczaniu matematyki, przykłady edukacyjnych programów komputerowych.
6. Reprezentacje enaktywne, ikoniczne i symboliczne i ich rola w procesie kształtowania pojęć matematycznych.
7. Specyfika języka szkolnej matematyki, charakterystyczne błędy popełniane przez uczniów i sposoby ich wykorzystywania w procesie kształtowania pojęć.

8. Lokalna dedukcja na lekcjach matematyki.
9. Czynnościowe nauczanie matematyki.
10. Elementy logiki w nauczaniu matematyki.
11. Metodyka nauki o liczbie i działaniach.
12. Metodyka nauki o funkcjach numerycznych i ich wykresach.
13. Metodyka nauki o przekształceniach geometrycznych.
14. Równania i nierówności w matematyce elementarnej.

### **III. Matematyka finansowa**

1. Dobór zmiennych objaśniających w modelu ekonometrycznym (eliminacja quasi-stałych, metoda analizy współczynników korelacji, metoda Hellwiga, metoda współczynnika korelacji wielorakiej, prosta metoda grafowa).
2. Metoda najmniejszych kwadratów i jej zastosowanie do szacowania parametrów modeli liniowych.
3. Weryfikacja modelu ekonometrycznego (dopasowanie modelu do danych empirycznych, istotność parametrów strukturalnych, badanie własności odchyłeń losowych).
4. Predykcja ekonometryczna – punktowa i przedziałowa.
5. Wycena papierów wartościowych (weksli, bonów skarbowych, certyfikatów depozytowych, obligacji, akcji).
6. Różne rodzaje jednookresowych modeli rynków papierów wartościowych i ich matematyczny opis.
7. Kapitalizacja odsetek. Stopa procentowa i dyskontowa. Matematyczne modele różnych rodzajów kapitalizacji.
8. Dyskonto w kapitalizacji prostej i złożonej.
9. Różne rodzaje oprocentowania wkładów oszczędnościowych.
10. Obliczenia finansowe dotyczące spłaty długów.